OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a IX-a

Problema 1. Rezolvaţi ecuaţia $\left[\frac{3x^2+1}{3}\right]-\left[\frac{2x^2+1}{2}\right]+\left[\frac{3x^2+2}{3}\right]=0$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Luigi Catană, Potcoava

Problema 2. Demonstraţi că pentru orice numere reale $x, y, z \geq 1$ are loc inegalitatea:

$$x\cdot\left(\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)+y\cdot\left(\sqrt{z-1}+\sqrt{x-1}\right)+z\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\leq x^2+y^2+z^2.$$

Florin Nicolaescu, Balş

Problema 3. Fie ABC un triunghi. Medianele AM, BN, CP taie cercul circumscris triunghiului ABC în punctele D, E, respectiv F. Ştiind că $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{PF}=\vec{0}$, arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică nr. 12/2013

Problema 4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât $a_1=1$ şi

$$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}+a_n}=a_n-1, \text{ pentru orice } n\geq 2.$$

Determinaţi partea întreagă a numărului $A_n=a_na_{n+1}+a_na_{n+2}+a_{n+1}a_{n+2}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Nelu Gerg, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a X-a

Problema 1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{z^2-z-2}{z-1}$.

Arătaţi că, dacă $z\neq 1$, atunci $f(z)\in\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $z\in\mathbb{R}$.

Problema 2. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases}\sqrt[4]{x\sqrt{x}}-\sqrt[4]{y\sqrt{y}}=7\\ \sqrt[14]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}+\sqrt[14]{y\sqrt{y\sqrt{y}}}=3\end{cases}$.

Gazeta Matematică nr. 9/2013

Problema 3. Determinaţi funcţiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ care satisfac condiţiile

$$xy\lg(xy)\le yf(x)+xf(y)\le f(xy),\text{ pentru orice } x,y>0.$$

Problema 4. Se consideră funcţia injectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că există $p\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(xy)=f(x)f(y)+p,\text{ pentru orice } x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că $p=0$.

b) Demonstraţi că f este impară.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a XI-a

Problema 1. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\cos x}-\cos 2x}{x^2}$.

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 2. Matricele $A, B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $I_2+3AB=2BA$.
Arătaţi că $\det(AB-BA)=0$.

Florin Nicolaescu, Balş

Problema 3. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=1$ şi

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+\frac{n}{n+1}}\ \text{, pentru orice } n\geq 1.$$

Arătaţi că $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 4. Fie $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $\det A=1$. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\det(A^2-A+I_3)=0$;

b) $\det(A+I_3)=6$ şi $\det(A-I_3)=0$.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2013

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a XII-a

Problema 1. Calculaţi $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}dx$.

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 3. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu $2n$ elemente şi H un subgrup al său cu n elemente, unde $n\in\mathbb{N}^*$. Arătaţi că $x^2\in H$, pentru orice $x\in G$.

[∗∗∗]

Problema 3. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit şi H un subgrup propriu, necomutativ, al său. Arătaţi că există două elemente distincte din $G\setminus H$ care comută.

Gazeta Matematică nr. 9/2013

Problema 4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi strict crescătoare şi $(c_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit de numere reale.

Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x+c_n)dx=\int_0^1 f(x)dx$.

Florian Dumitrel, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 16 februarie 2014
CLASA A IX-A

Problema 1. Rezolvaţi ecuaţia

$$\left[\frac{3x^2+1}{3}\right]-\left[\frac{2x^2+1}{2}\right]+\left[\frac{3x^2+2}{3}\right]=0,$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Luigi Catană, Potcoava

Soluţie. Ecuaţia din enunţ se scrie sub forma $\left[x^2+\frac{1}{3}\right]+\left[x^2+\frac{2}{3}\right]=\left[x^2+\frac{1}{2}\right]$, de unde, adunând în ambii membri $\left[x^2\right]$ şi folosind identitatea lui Hermite, rezultă $\left[3x^2\right]=\left[2x^2\right]$.

Notând $x^2=y$, cu $y\geq 0$, rezultă $[3y]=[2y]\overset{not}{=}p$, unde $p\in\mathbb{N}$, de unde $y\in\left[\frac{p}{3},\frac{p+1}{3}\right)\cap\left[\frac{p}{2},\frac{p+1}{2}\right)$.

Pentru $p\geq 2$ avem $\frac{p+1}{3}\leq\frac{p}{2}$, adică $\left[\frac{p}{3},\frac{p+1}{3}\right)\cap\left[\frac{p}{2},\frac{p+1}{2}\right)=\varnothing$.

Pentru $p=0$ rezultă $y\in\left[0,\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow x^2\in\left[0,\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Pentru $p=1$ rezultă $y\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow x^2\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

În concluzie, $x\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Problema 2. Demonstraţi că pentru orice numere reale $x,y,z\geq 1$ are loc inegalitatea:

$$x\left(\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)+y\left(\sqrt{z-1}+\sqrt{x-1}\right)+z\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\leq x^2+y^2+z^2.$$

Florin Nicolaescu, Balş

Soluţie. Pentru orice $x,y\geq 1$ vom arăta că $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\leq xy$. Într-adevăr, împărţind prin xy, inegalitatea se rescrie $\frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{\sqrt{y-1}}{y}\leq 1$, care se obţine din echivalenţa

$$\frac{\sqrt{a-1}}{a}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{a-1}\leq a\Leftrightarrow(a-2)^2\geq 0,$$

valabilă pentru orice $a\geq 1$.

Adunând inegalitatea $(*)$ cu analoagele obţinute prin permutări circulare, obţinem:

$$x\left(\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)+y\left(\sqrt{z-1}+\sqrt{x-1}\right)+z\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\leq xy+yz+xz\leq x^2+y^2+z^2.$$

Egalitatea are loc pentru $x=y=z=2$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi. Medianele AM, BN, CP taie cercul circumscris triunghiului ABC în punctele D, E, respectiv F. Ştiind că $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{0}$, arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică nr. 12/2013

Soluţie. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Deoarece vectorii $\overrightarrow{MD}$ şi $\overrightarrow{GM}$ sunt coliniari, rezultă că există $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{MD}=\alpha\overrightarrow{GM}$. Analog, există $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{NE}=\beta\overrightarrow{GN}$ şi $\overrightarrow{PF}=\gamma\overrightarrow{GP}$. Ţinând cont că $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{0}$, rezultă:

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{PF}=\alpha\overrightarrow{GM}+\beta\overrightarrow{GN}+\gamma\overrightarrow{GP}=\alpha\overrightarrow{GM}+\beta\overrightarrow{GN}-\gamma\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}\right)=(\alpha-\beta)\overrightarrow{GM}+(\beta-\gamma)\overrightarrow{GN}.$$

Deorece $\overrightarrow{GM}$ şi $\overrightarrow{GN}$ sunt vectori necoliniari, rezultă $\alpha-\beta=\beta-\gamma=0$, de unde $\alpha=\beta=\gamma$.

Din $\overrightarrow{MD}=\alpha\overrightarrow{GM}$ şi $\overrightarrow{NE}=\alpha\overrightarrow{GN}$, obţinem

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{GD}=\left(\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{NE}\right)-\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MD}\right)=(\alpha+1)\left(\overrightarrow{GN}-\overrightarrow{GM}\right)=(\alpha+1)\overrightarrow{MN},$$

deci $DE\parallel MN\parallel AB$. Analog, se obţin relaţiile $EF\parallel PN\parallel BC$ şi $DF\parallel MP\parallel AC$.

Ca urmare, arcele AE şi BD sunt congruente, arcele CE şi BF sunt congruente şi arcele AF şi CD sunt congruente. De aici rezultă că $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ sunt diametri, adică G este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. în concluzie, triunghiul ABC este echilateral.

Problema 4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât $a_1=1$ şi

$$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}+a_n}=a_n-1,\ \text{pentru orice } n\geq 2.$$

Determinaţi partea întreagă a numărului $A_n=a_na_{n+1}+a_na_{n+2}+a_{n+1}a_{n+2}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Nelu Gerg, Slatina

Soluţie. Pentru $n=2$, din relaţia din enunţ se obţine $a_2=\sqrt{2}$.

Scriind relaţia din enunţ pentru $n\to n+1$, rezultă

$$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}+a_n}+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}=a_{n+1}-1,$$

de unde, folosind din nou enunţul, rezultă că pentru orice $n\geq 2$ avem

$$a_n-1+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}=a_{n+1}-1\Leftrightarrow(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=1\Leftrightarrow a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+1}.$$

Prin inducţie, se demonstrează că $a_n=\sqrt{n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Avem $A_n=\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}$. Deoarece pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ au loc relaţiile

$$n+\frac{1}{3}<\sqrt{n(n+1)}<n+\frac{1}{2},\quad n+\frac{2}{3}<\sqrt{n(n+2)}<n+1,\quad n+1<\sqrt{(n+1)(n+2)}<n+\frac{3}{2},$$

prin adunare se obţine că $3n+2<A_n<3n+3$, de unde $[A_n]=3n+2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

Etapa locală – 16 februarie 2014

CLASA A X-A

Problema 1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{z^2-z-2}{z-1}$. Arătaţi că, dacă $z\neq 1$, atunci $f(z)\in\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $z\in\mathbb{R}$.

Soluţie. Fie $z\neq 1$. Deoarece $f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(z)=\overline{f(z)}$, scriind $f(z)=z-\dfrac{2}{z-1}$, avem succesiv:

$$f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z-\frac{2}{z-1}=\overline{z}-\frac{2}{\overline{z}-1}\Leftrightarrow z-\overline{z}+\frac{2(z-\overline{z})}{(z-1)(\overline{z}-1)}=0\Leftrightarrow(z-\overline{z})\left(1+\frac{2}{(z-1)(\overline{z}-1)}\right)=0.$$

Presupunând $1+\dfrac{2}{(z-1)(\overline{z}-1)}=0$, de unde $(z-1)(\overline{z}-1)+2=0$, adică $|z-1|^2+2=0$, imposibil.
Ca urmare, $f(z)\in\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $z-\overline{z}=0$, adică $z\in\mathbb{R}$.

Problema 2. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases}\sqrt[4]{x\sqrt{x}}-\sqrt[4]{y\sqrt{y}}=7\\ \sqrt[14]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}+\sqrt[14]{y\sqrt{y\sqrt{y}}}=3\end{cases}$.

Gazeta Matematică nr. 9/2013

Soluţie. Evident, $x,y\geq 0$. Sistemul se rescrie sub forma

$$\begin{cases}\sqrt[8]{x^3}-\sqrt[8]{y^3}=7\\ \sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}=3\end{cases}.$$

Notând $\sqrt[8]{x}=a$, $\sqrt[8]{y}=b$, unde $a,b\geq 0$, rezultă $a+b=3$ şi $a^3-b^3=7$, ceea ce conduce la ecuaţia

$$a^3-(3-a)^3=7\Leftrightarrow 2a^3-9a^2+27a-34=0\Leftrightarrow(a-2)\left(2a^2-5a+17\right)=0.$$

Unica soluţie reală a ecuaţiei este $a=2$, pentru care se obţine $b=1$, $x=256$ şi $y=1$.

Problema 3. Determinaţi funcţiile care satisfac condiţiile

$$xy\lg(xy)\leq yf(x)+xf(y)\leq f(xy),\text{pentru orice } x,y>0.$$

Soluţie. Pentru $x=y=1$, din enunţ rezultă $0\leq 2f(1)\leq f(1)$, de unde $f(1)=0$.
Pentru $y=1$, relaţia din enunţ conduce la $x\lg x\leq f(x)$, pentru orice $x>0$. (1)
Pentru $y=\dfrac{1}{x}$, din enunţ se obţine $0\leq\dfrac{f(x)}{x}+xf\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq 0$, deci $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{f(x)}{x^2}$, pentru orice $x>0$. (2)
Pentru $y=\dfrac{1}{x}$, din (1) rezultă $\dfrac{1}{x}\lg\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, deci $f\left(\dfrac{1}{x}\right)\geq-\dfrac{\lg x}{x}$ şi, ţinând cont de (2), obţinem

$$-\frac{f(x)}{x^2}\geq-\frac{\lg x}{x}\Leftrightarrow f(x)\leq x\lg x,\quad\text{pentru orice } x>0. \tag{3}$$

Din (1) şi (3) rezultă că $f(x)=x\lg x$, pentru orice $x>0$, funcţie care satisface condiţia din enunţ.

Problema 4. Se consideră funcţia injectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că există $p\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(xy)=f(x)f(y)+p,\ \text{pentru orice } x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că $p=0$.
b) Demonstraţi că f este impară.

Soluţie. a) Pentru $y = 0$, rezultă $f(0) = f(x) f(0) + p$, de unde, presupunând $f(0) \neq 0$, ar rezulta că $f(x) = \dfrac{p - f(0)}{f(0)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică f ar fi constantă, contradicţie cu f injectivă.

Ca urmare, $f(0) = 0$. Luând acum $x = y = 0$, din enunţ rezultă $p = 0$.

b) Conform punctului anterior, avem $f(xy) = f(x) f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. $(*)$

Pentru $x = y = 1$, avem $f(1) = f^2(1)$, de unde rezultă că $f(1) \in \{0, 1\}$. Cum f este injectivă şi $f(0) = 0$, rezultă $f(1) = 1$.

Pentru $x = y = -1$, rezultă $1 = f(1) = f^2(-1)$, deci $f(-1) \in \{-1, 1\}$. Cum f este injectivă şi $f(1) = 1$, rezultă $f(-1) = -1$.

Pentru $y = -1$, din relaţia $(*)$ rezultă $f(-x) = f(x) f(-1) = -f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci este f este impară.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

Etapa locală – 16 februarie 2014

CLASA A XI-A

Problema 1. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\cos x}-\cos 2x}{x^2}$.

Florian Dumitrel

Soluţie. Pentru orice x cu $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$, avem:

$$\begin{aligned}\frac{(\cos x)^{\cos x}-\cos 2x}{x^2} &= \frac{e^{\cos x\cdot\ln(\cos x)}-1}{x^2}+\frac{1-\cos 2x}{x^2}= \\ &= \cos x\cdot\frac{e^{\cos x\cdot\ln(\cos x)}-1}{\cos x\cdot\ln(\cos x)}\cdot\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}+\frac{1-\cos 2x}{x^2}.\end{aligned}$$

Întrucât

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2,\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

şi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x\cdot\ln(\cos x)}-1}{\cos x\cdot\ln(\cos x)}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1,$$

rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\cos x}-\cos x}{x^2}=\dfrac{3}{2}$.

Problema 2. Matricele $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $I_2+3AB=2BA$. Arătaţi că $\det(AB-BA)=0$.

Florin Nicolaescu

Soluţie. Din ipoteză rezultă că $I_2+AB=2(BA-AB)$ şi $I_2+BA=3(BA-AB)$. Prin urmare,

$$\det(I_2+AB)=4\det(BA-AB)\ \text{ şi }\ \det(I_2+BA)=9\det(BA-AB). \qquad (*)$$

Vom arăta că $\det(I_2+AB)=\det(I_2+BA)$. Pentru orice matrice $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi orice $x\in\mathbb{R}$, avem

$$f_M(x):=\det(xI_2+M)=\det M+TrM\cdot x+x^2.$$

Cum $\det(AB)=\det(BA)$ şi $Tr(AB)=Tr(BA)$, deducem că $f_{AB}(x)=f_{BA}(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. În consecinţă, avem $f_{AB}(1)=f_{BA}(1)$, adică $\det(I_2+AB)=\det(I_2+BA)$.

Din relaţia $(*)$ rezultă că $\det(BA-AB)=0$, deci $\det(AB-BA)=0$.

Problema 3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$a_1=1 \text{ şi } a_{n+1}=\sqrt{a_n+\frac{n}{n+1}},\ \ (\forall)\,n\geq 1.$$

Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Florian Dumitrel

Soluţie. Prin inducţie se arată că

$$1\leq a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \ (\forall)\,n\in\mathbb{N}^*$$

sau, de exemplu,

$$1\leq a_n<2,\ \ (\forall)\,n\in\mathbb{N}^*.$$

Avem $a_1=1$ şi $a_2=\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}$, deci $a_1<a_2$. În ipoteza $a_{n-1}<a_n$, rezultă că

$$a_{n-1}+\frac{n-1}{n}<a_{n-1}+\frac{n}{n+1}<a_n+\frac{n}{n+1},$$

şi, în consecinţă, $a_n < a_{n+1}$. Deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

Fiind crescător şi mărginit superior, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Dacă $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci $a = \sqrt{a+1}$ $(a > 1)$, de unde obţinem $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Problema 4. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $\det(A) = 1$. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) $\det\left(A^2 - A + I_3\right) = 0$;
b) $\det(A + I_3) = 6$ şi $\det(A - I_3) = 0$.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2013

Soluţie. Polinomul caracteristic al matricei A are forma

$$f_A(x) = \det(xI_3 - A) = x^3 + ax^2 + bx - 1.$$

Deoarece $A^2 - A + I_3 = (A - \omega I_3)(A - \overline{\omega} I_3)$, unde $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\omega^3 = -1$, rezultă că

$$\det\left(A^2 - A + I_3\right) = |\det(A - \omega I_3)|^2 = |f_A(\omega)|^2. \qquad (*)$$

($\Rightarrow$) Dacă $\det\left(A^2 - A + I_3\right) = 0$, atunci $f_A(\omega) = 0$, de unde obţinem $a = -2$ şi $b = 2$, deci

$$f_A(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

Prin urmare, $\det(A + I_3) = -f_A(-1) = 6$ şi $\det(A - I_3) = -f_A(1) = 0$.

($\Leftarrow$) Conform ipotezei, avem $f_A(-1) = -6$ şi $f_A(1) = 0$, deci

$$f_A(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

Cum $f_A(\omega) = 0$, din relaţia $(*)$ deducem că $\det\left(A^2 - A + I_3\right) = 0$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

Etapa locală – 16 februarie 2014

CLASA A XII-A

Problema 1. Calculaţi $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\sin 2x}dx$.

Florian Dumitrel

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă

$$\varphi:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad x=\varphi(t)=\frac{\pi}{2}-t,$$

obţinem

$$\begin{aligned}I &= \int_{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\varphi(0)}\frac{x}{1+\sin 2x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\frac{\pi}{2}-t}{1+\sin(\pi-2t)}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)'dt=\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-t}{1+\sin 2t}dt=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin 2t}dx-I.\end{aligned}$$

Prin urmare, $I=\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin 2t}dt$.

Notăm $J(a)=\displaystyle\int_0^a\frac{1}{1+\sin 2t}dx,\ a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; avem:

$$\begin{aligned}J(a) &= \int_0^a\frac{1}{1+\sin 2t}dt=\int_0^a\frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{(1+\operatorname{tg}t)^2}dt=\int_0^a\frac{(1+\operatorname{tg}t)'}{(1+\operatorname{tg}t)^2}dt=\\ &= -\frac{1}{1+\operatorname{tg}t}\Bigg|_0^a=1-\frac{1}{1+\operatorname{tg}a}.\end{aligned}$$

Cum $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin 2t}dt=\lim_{a\uparrow\frac{\pi}{2}}J(a)=1$, deducem că $I=\dfrac{\pi}{4}$.

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu $2n$ elemente şi H un subgrup al său cu n elemente. Să se arate că $x^2\in H$ pentru orice $x\in G$.

[∗ ∗ ∗]

Soluţie. Presupunem că există $a\in G$ cu $a^2\in G\setminus H$ (este clar că $a\in G\setminus H$). Funcţia

$$f:H\to G\setminus H,\ f(x)=ax$$

este injectivă şi, cum $|H|=|G\setminus H|=n$, rezultă că este şi surjectivă. Atunci există $x_0\in H$ astfel încât $f(x_0)=a^2$, adică $ax_0=a^2$, de unde $a=x_0\in H$, contradicţie. Aşadar, $x^2\in H$ pentru orice $x\in G$.

Problema 3. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit şi H un subgrup propriu, necomutativ, al său. Arătaţi că există două elemente distincte din $G\setminus H$ care comută.

Gazeta Matematică nr. 9/2013

Soluţie. Deoarece H este subgrup propriu al lui G, avem $|H|\geq 2$ şi $G\setminus H\neq\varnothing$, deci există $a\in G\setminus H$.

Aplicaţia $\varphi:H\to G\setminus H$, $\varphi(x)=ax$ este injectivă şi atunci $|G\setminus H|\geq|H|\geq 2$, adică $G\setminus H$ are cel puţin două elemente distincte.

Presupunem prin absurd că oricare elemente distincte din $G\setminus H$ nu comută între ele. Pentru orice $b\in G\setminus H$ avem $b^{-1}\in G\setminus H$. Dacă am avea $b\neq b^{-1}$ ar rezulta că $bb^{-1}\neq b^{-1}b$, adică $e\neq e$, contradicţie. Deci $b=b^{-1}$, ceea ce înseamnă că $b^2=e$ (e este elementul neutru al grupului G).

Fie $b\in G\setminus H$ şi $h\in H$. Atunci $bh\in G\setminus H$; obţinem $bh=(bh)^{-1}=h^{-1}b^{-1}=h^{-1}b$, de unde

$$bhb=h^{-1}. \qquad (*)$$

Fie acum $x,y\in H$ şi $b\in G\setminus H$. Folosind relaţia $(*)$, avem

$$bxy=bxb\cdot byb\cdot b=x^{-1}y^{-1}b=(byx)^{-1}=byx,$$

de unde obţinem $xy = yx$, în contradicţie cu faptul că H este grup necomutativ.

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi strict crescătoare şi $(c_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit de numere reale.

Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x + c_n)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Florian Dumitrel

Soluţie. ($\Rightarrow$) Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x + c_n)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ este primitivă a lui f. Deoarece F este continuă şi

$$\int_0^1 f(x + c_n)\, dx = \int_{c_n}^{c_n+1} f(t)\, dt = F(c_n + 1) - F(c_n),$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x + c_n)\, dx = F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x)\, dx$.

($\Leftarrow$) Vom demonstra acum că orice subşir convergent al şirului mărginit $(c_n)_{n\geq 1}$ are limita 0, de unde va rezulta că $c_n \to 0$. Fie $(c_{k_n})_{n\geq 1}$ un subşir convergent al şirului $(c_n)_{n\geq 1}$ şi $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_{k_n}$. Să presupunem că $c \neq 0$, de exemplu $c > 0$. Din faptul că f este strict crescătoare rezultă că $f(x + c) > f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$; obţinem

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x + c_{k_n})\, dx = \int_0^1 f(x + c)\, dx > \int_0^1 f(x)\, dx,$$

contradicţie. Deci $c = 0$.

Observaţie. Este suficient ca f să fie doar strict crescătoare, caz în care pentru a demonstra implicaţia ($\Leftarrow$) se foloseşte criteriul lui *Lebesgue* de integrabilitate.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a V-a

Problema 1. Împărţind numărul natural a la numărul natural b se obţine câtul 14 şi restul 18. Ştiind că diferenţa dintre numerele a şi $a-3b$ este egală cu 135, arătaţi că numărul $2a$ este pătrat perfect.

Gazeta Matematică nr. 11/2013

Problema 2. Se consideră numerele naturale a, b, c, d astfel încât $a<b<c<d$ şi $a\cdot b\cdot c\cdot d=2014$. Aflaţi ultima cifră a numărului $n=a^{2014}+b^{2014}+c^{2014}+d^{2014}$.

Nicolae Tomescu, Corabia

Problema 3. Fie numărul $S=1+3^3+3^6+3^9+...+3^{2010}$.

a) Arătaţi că numărul $26S+1$ este cub perfect.

b) Determinaţi numărul natural a cu pentru care are loc egalitatea $a^{61}=26S+1$.

Nicolae Bivol,Corabia

Problema 4. Se consideră mulţimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\, x=n^2+5,\ n\in\mathbb{N},\ n\le 2014\right\}$.

a) Aflaţi cele mai mici patru elemente ale mulţimii A.

b) Arătaţi că $261\in A$ şi că $2014\notin A$.

c) Fie mulţimea $B=\left\{y\in\mathbb{N}\,\middle|\, y=n(n+1)+5,\ n\in\mathbb{N},\ n\le 2014\right\}$.

Calculaţi diferenţa $S(B)-S(A)$, unde $S(A)$ este suma elementelor mulţimii A, iar $S(B)$ este suma elementelor mulţimii B.

Florin Năsui,Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore şi 30 de minute.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a V-a

Soluţii şi bareme de corectare

Problema 1.

Din teorema impartirii cu rest avem:$a = 14b + 18, 14 < 18$ (2p)

Cum a=a-3b+135, rezulta b=45 (2p)

a= $14 \cdot 45 + 18$, de unde a=648 (2p)

$2a = 1296 = 36^2$ rezulta 2a este patrat perfect. (1p)

Problema 2.

$2014 = 1 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 53$ (1p)

Cum $a < b < c < d$ si 2,19,53 numere prime,avem a=1;b=2;c=19;d=53 si $n = 1^{2014} + 2^{2014} + 19^{2014} + 53^{2014}$ (1p)

$U(1^{2014}) = 1, U(2^{2014}) = 4, U(19^{2014}) = 1 si\ U(53^{2014}) = 9$ (4p)

Atunci $U(n) = U(1 + 4 + 1 + 9) = U(15) = 5$ (1p)

Problema 3.

a) Fie $S = 1 + 3^3 + 3^6 + 3^9 + \cdots + 3^{2010} / \cdot 3^3$ (1p)
   27S=$3^3 + 3^6 + 3^9 + \cdots + 3^{2010} + 3^{2013}$ (1p)
   27S-S=$3^{2013} - 1 \Rightarrow 26S + 1 = 3^{2013}$ (1p)
   26S+1=$(3^{671})^3$cub perfect (1p)

b) 26S+1=$(3^{671})^3=(3^{61\cdot 11})^3=(3^{33})^{61} = a^{61}$
   $\Rightarrow a = 3^{33}$ (3p)

Problema 4. Cele mai mici patru elemente sunt 5,6,9,14 (2p)

a) $n^2 + 5 = 261 \Rightarrow n^2 = 256 \Rightarrow n = 16, deci\ 261 \in A$ (1p)

$n^2 + 5 = 2014 \Rightarrow n^2 = 2009$

Cum $2009 = 7^2 \cdot 41 \Rightarrow 2009\ nu$ este patrat perfec,deci 2014 nu este termen al sirului (2p)

c)S(B)-S(A)=0+1+2+3+...+2014=2029105 (2p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VI-a

Problema 1. Arătaţi că $0,(03) < \frac{1}{1953} + \frac{1}{1954} + ... + \frac{1}{2013} < 0,(3)$.

Carmen Firicescu, Corabia

Problema 2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor raţionale pozitive ecuaţia:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+5}{3} + \frac{x+11}{4} + \frac{x+19}{5} + \frac{x+29}{6} + \frac{x+41}{7} + \frac{x+55}{8} + \frac{x+71}{9} + \frac{x+89}{10} = 45.$$

Gazeta Matematică nr. 10/2013

Problema 3. Determinaţi numerele prime $a < b < c$ care verifică relaţia

$$13a + 65b + 289c = 6622.$$

Costel Anghel, Negreni

Problema 4. Fie unghiurile neadiacente AOC şi AOB astfel încât $\frac{m(\sphericalangle AOB)}{m(\sphericalangle AOC)} = 1,5$. Se ştie că măsura unghiului format de bisectoarele lor este de 30°.

a) Determinați măsurile celor doua unghiuri.

b) Arătați ca (OA şi (OB sunt semidrepte opuse.

Nicolae Bivol,Corabia

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore şi 30 de minute.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VI-a

Soluţii şi bareme de corectare

Problema 1.

Avem $\frac{1}{2013}<\frac{1}{1953}=\frac{1}{1953}$, $\frac{1}{2013}<\frac{1}{1954}<\frac{1}{1953}$, ……$\frac{1}{2013}=\frac{1}{2013}<\frac{1}{1953}$ (4p)

Adunand relatiile obtinem:

$\frac{61}{2013}<S<\frac{61}{1953}(1p)\Rightarrow\frac{1}{33}<S<\frac{61}{1953}<\frac{651}{1953}(1p)\Rightarrow 0,(03)<S<0,(3)$ (1p)

Problema 2.

Avem:$1+2+3+\cdots+9=45$ (1p)

Ecuatia se poate scrie:

$\left(\frac{x+1}{2}-1\right)+\left(\frac{x+5}{3}-2\right)+\left(\frac{x+11}{4}-3\right)+\left(\frac{x+19}{5}-4\right)+\left(\frac{x+29}{6}-5\right)+\left(\frac{x+41}{7}-6\right)++\left(\frac{x+55}{8}-7\right)+\left(\frac{x+71}{9}-8\right)+\left(\frac{x+89}{10}-9\right)=0\ (3p)$

$\Leftrightarrow\frac{x-1}{2}+\frac{x-1}{3}+\frac{x-1}{4}+\cdots+\frac{x-1}{10}=0\ (1p)$ $\Rightarrow(x-1)\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{10}\right)}_{\neq 0}$=0 (1p)

$\Leftrightarrow x-1=0\Rightarrow x=1\ (1p)$

Problema 3.

Numerele a,b,c nu pot fi toate impare deoarece membrul stang al egalitatii ar fi un numar impar,ce nu poate fi egal cu 6622.Deci putem avea un singur numar par sau toate pare.(2p)

Daca toate trei ar fi pare am avea a=b=c=2 care nu verifica (1p)

Deci un singur numar este par.Cum $a<b<c\Rightarrow a=2$. (1p)

Obtinem:$65b+289c=6596$.Cum 6596=$17\cdot 388$ si $289=17^2$,trebuie ca b sa fie un multiplu al lui 17.Dar b este numar prim, de unde b=17. (2p).Inlocuind se obtine c=19 (1p)

Problema 4.

a) Avem:$\frac{m(<AOB)}{m(<AOC)}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{m(<AOB)}{3}=\frac{m(<AOC)}{2}=k\Rightarrow m(<AOB)=3k\ si\ m(<AOC)=2k,$

Deci $(OC\ este\ in\ Int(<AOB)$ (2p)

Daca (OM este bisectoarea $<AOC\Rightarrow m(<AOM)=m(<MOC)=k$ (1p)

Daca (ON este bisectoarea $<AOB\Rightarrow m(<AON)=m(<NOB)=\frac{3k}{2}$ (1p)

Atunci $m(<MON)=\frac{3k}{2}-k=\frac{k}{2}\Rightarrow\frac{k}{2}=30^0\Rightarrow k=60^0$ (1p)

Avem $m(<AOC)=120^0\ si\ m(<AOB)=180^0$ (1p)

b)Din $m(<AOB)=180^0\Rightarrow(OA\ si\ (OB$ sunt semidrepte opuse. (1p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VII-a

Problema 1. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ care verifică relaţia $\sqrt{a+\sqrt{\overline{ab}}}=a$.

Gazeta Matematică nr. 1/2014

Problema 2. Determinați numărul real *x* pentru care

$$[x+2013]+3\{x\}=2014,$$

unde $[a]$ este partea întreagă, iar $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real *a*.

Carmen Firicescu, Corabia

Problema 3. Se consideră dreptunghiul *ABCD* cu $AB=3AD$. Fie $E\in(AB)$ şi $F\in(CD)$ astfel încât $[AE]\equiv[AD]\equiv[DF]$. Dacă $\{M\}=BD\cap EF$, arătaţi că dreapta *CM* trece prin mijlocul segmentului [*AD*].

Costel Anghel, Negreni

Problema 4. Fie triunghiul *ABC* şi punctele $M\in(BC)$, $D\in(AM)$. Prin punctele *D*, respectiv *C*, se construiesc paralele la *AB*, respectiv *AM*, care se intersectează în *E*. Ştiind că *AE* este paralelă cu *BD*, demonstrați că *M* este mijlocul lui [*BC*].

Ion Neaţă, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VII-a

Soluţii şi bareme de corectare

1. Se ridica relatia la patrat si se obtine:$\sqrt{\overline{ab}}=a^2-a$……1p
   Din a cifra avem : $a^2-a \in \{0,2,6,12,20,30,42,60,72\}$……1 p.
   Din $a^2-a \in N \Rightarrow \sqrt{\overline{ab}} \in N \Rightarrow \overline{ab}\ patrat\ perfect$……1p
   Daca a=1 atunci $\sqrt{\overline{1b}}$=0, nu exista solutie……1p
   Daca a=2 atunci $\sqrt{\overline{2b}}$=2, nu exista solutie……..1p
   Daca a=3 atunci $\sqrt{\overline{3b}}$=6, exista $\overline{ab}$=36……1p
   Daca a>3 obtinem numere de doua cifre care sunt radacini patrate ale unor numere de cel putin trei cifre, ori $\overline{ab}$ are doar doua cifre, deci nu mai sunt solutii.
   ……1p
2. Sa se determine numarul real *x* pentru care: [*x* + 2013] + 3{*x*} = 2014

[*x* + 2013] + 3{*x*} = 2014 ⇔ [*x*] + 2013 + 3{*x*} = 2014 ⇔ [*x*] + 3{*x*} = 1 ⇒ 3{*x*} ∈ **Z** ⇔ {*x*} ∈ $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$……..3p

$\{x\}=0 \leftrightarrow [x]=1 \leftrightarrow x=1$ ……..1p

$\{x\}=\frac{1}{3} \leftrightarrow [x]=0 \leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ……1p

$\{x\}=\frac{2}{3} \leftrightarrow [x]=-1 \leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ ……..2p

3. AEFD patrat⇒ $FM||AD \underset{tfa}{\Longrightarrow} \Delta FDM \sim \Delta CDB \Rightarrow \frac{DF}{DC}=\frac{DM}{DB}=\frac{1}{3}$ ……2p
   ABCD dreptunghi⇒DB=2 DO⇒ $\frac{1}{3}=\frac{DM}{2DO} \Rightarrow \frac{DM}{DO}=\frac{2}{3}$……1p
   In ΔDAC avem DO mediana si $\frac{DM}{DO}=\frac{2}{3} \Rightarrow M$ centru de greutate al ΔDAC 2p
   Atunci CM este mediana a ΔDAC si intalneste AD in mijlocul ei……..2p
4. Din AE||BD si AB||ED⇒AEDB paralelogram⇒AE=BD,AB=ED……1p
   Fie BD∩ $CE=\{N\} \Rightarrow AE||DN\ si\ AD||EN \Rightarrow AENDparalelogram \Rightarrow$
   $AE=DN$.. ……3p
   Din AE=BD si AE=DN⇒D mijlocul [BN]……1p
   Din D mijlocul [BN] si DM||CN⇒
   $[DM]$ linie mijlocie in ΔBCN⇒ $M\ mijlocul\ [BC]$……2p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VIII-a

Problema 1. Arătaţi că pentru orice numere reale *a*, *b*, *c* are loc inegalitatea:

$$\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}+\sqrt{(b+1)^2+(c+1)^2}+\sqrt{(c+1)^2+(a+1)^2}\geq\sqrt{2}\cdot(a+b+c+3).$$

Gazeta Matematică nr. 11/2013

Problema 2. Determinaţi numerele naturale *x*, *y* care verifică relaţia:

$$x^3+28x^2+96x=5^y\ .$$

Luigi Catană, Potcoava

Problema 3. Se consideră numerele reale $x, y\in(2012,2014)$ şi numărul

$$a=xy-2013x-2013y+2013\cdot 2014.$$

Arătaţi că $a\in(2012,2014)$.

Nicolae Tomescu, Corabia

Problema 4. Fie patrulaterul inscriptibil *ABCD*, în care lungimile $AB=a$, $BD=b$, $DA=d$, ale laturilor triunghiului *ABD*, sunt în relaţia $a^2+b^2+d^2=ab+bd+da$, iar $AC=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

În punctul *C* se ridică perpendiculara *CM* pe planul (*ABC*) astfel încât $CM=\frac{1}{2}AC$.

a) Arătaţi că $AC\neq BD$.
b) Calculaţi distanţa de la punctul *C* la planul (*MAB*).
c) Determinaţi sinusul unghiului diedru format de planele (*MAC*) şi (*MAB*).

Nicolae Bivol,Corabia

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VIII-a

Soluţii şi bareme de corectare

Barem de corectare:

1. $\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2} \geq \sqrt{2}\cdot\frac{a+1+b+1}{2}=\sqrt{2}\cdot\frac{a+b+2}{2}$ 2p

$\sqrt{(b+1)^2+(c+1)^2} \geq \sqrt{2}\cdot\frac{b+1+c+1}{2}=\sqrt{2}\cdot\frac{c+b+2}{2}$ 2p

$\sqrt{(a+1)^2+(c+1)^2} \geq \sqrt{2}\cdot\frac{a+1+c+1}{2}=\sqrt{2}\cdot\frac{c+a+2}{2}$ 2p

$\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}+\sqrt{(b+1)^2+(c+1)^2}+\sqrt{(a+1)^2+(c+1)^2} \geq$

$\sqrt{2}\left(\cdot\frac{a+b+2}{2}+\cdot\frac{c+b+2}{2}+\cdot\frac{c+a+2}{2}\right)=\sqrt{2}$ (a+b+c+3).....1p

2. $X^3+28x^2+96x=x(x^2+28x+96)=x(x+4)(x+24)$.....3p
   Notam: $x=5^u$, $x+4=5^v$, $x+24=5^t$ si u+v+t=y.....1p
   Din $x+4-x=5^v-5^u$ avem $5^u(5^{u-v}-1)=4$.....1p
   Cum 5^u impar, avem $5^u=1$, de unde u=0 si x=1.....1p
   Din $5^y=5^3$ avem y=3, deci solutie x=1,y=3 .....1p

3. Din $x \in (2012;2014) \Leftrightarrow 2012 < x < 2014 \Leftrightarrow -1 < x-2013 < 1 \Leftrightarrow |x-2013| < 1$
   si analog |y-2013|<1.....2p
   |x-2013||y-2013|<1$\Leftrightarrow |(x-2013)(y-2013)| < 1 \Leftrightarrow |xy-2013x-2013y+2013^2| < 1 \Leftrightarrow -1 < xy-2013x-2013y+2013^2 < 1 \Leftrightarrow$.....2p
   $2012 < xy-2013x-2013y+2013^2+2013 < 2014 \Leftrightarrow$.....1p
   $2012 < xy-2013x-2013y+2013(2013+1) < 2014 \Leftrightarrow$.....1p
   $2012 < xy-2013x-2013y+2013.2014 < 2014 \Leftrightarrow 2012 < a < 2014 \Leftrightarrow$
   $a \in (2012;2014)$.....1p

4.

a) laturile ΔBAD sunt in relatia: $a^2+b^2+d^2=ab+ad+bd \Leftrightarrow$
   $(a-b)^2+(a-d)^2+(b-d)^2=0 \Leftrightarrow a=b=d \Leftrightarrow \Delta ABD$ *echilatera l*.....(1*p*)
   din ABCD patrulater inscriptibil, cu teorema I a lui Ptolemeu avem:

$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD \Leftrightarrow AC \cdot a = a \cdot BC + a \cdot CD \Leftrightarrow AC = BC + CD.$

Daca prin absurd AC=BD atunci BD=BC+CD in ΔBCD, ceea ce contrazice existenta triunghiului, deci presupunerea facuta este falsa, atunci AC≠BD……(2p).

b) ΔBAD este echilateral inscris in acelasi cerc ca si patrulaterul ABCD.

Fie O centrul acestui cerc si OA raza sa. Atunci, daca AB=a, OA=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$, de unde diametrul este $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Dar AC=$\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. iar diametrul este coarda maxima intr-un cerc

$\Rightarrow$AC diametrul cercului……..(1p).

Din [AC] diametru$\Rightarrow$BC=CD=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$, si m($\angle ABC$) $= 90^\circ$.

Atunci din $CM \perp (ABC), CB \perp BA, BA \subset (ABC) \Rightarrow MB \perp BA.$

Atunci din: $AB \perp BC \; si \; AB \perp MB \Rightarrow AB \perp (MBC) \; si \; AB \subset (MAB) \Rightarrow (MBC) \perp (MAB)$

….(1p)

Din $CQ \perp MB, CQ \subset (CMB), MB = (CMB) \cap (CMA) \Rightarrow CQ \perp (CMA) \Rightarrow$

d(C,(CMA))=CQ=$\frac{CM \cdot CB}{MB} = \frac{CB^2}{CB\sqrt{2}} = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$……(1p).

Din $CQ \perp (CMA) \; si \; QT \perp MA \Rightarrow CT \perp MA \Rightarrow m(\angle(MAC),(MAB)) = m(\angle CTQ)$

In

$$\Delta CQT,\ m(\angle CQT) = 90^\circ,\ \sin(\angle CTQ) = \frac{CQ}{CT} = \frac{\frac{CM \cdot CB}{MB}}{\frac{CM \cdot CA}{MA}} = \frac{\frac{CB}{MB}}{\frac{2 \cdot CB}{MA}} = \frac{MA}{2 \cdot MB} = \frac{CB\sqrt{5}}{2CB\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

…(1p)